RİYAZİYYAT

ИССЛЕДОВАНИЕ ОБОБЩЁННОГО РЕШЕНИЯ ОДНОМЕРНОЙ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ПОЛУЛИНЕЙНЫХ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА. I.

К.И.ХУДАВЕРДИЕВ, С.А.АГАЕВА

Бакинский Государственный Университет

Работа посвящена изучению вопросов существования и единственности обобщенного решения одномерной смешанной задачи для полулинейных параболических уравнений четвертого порядка. Введено понятие обобщенного решения изучаемой смешанной задачи. После применения метода Фурье решение исходной задачи сведено к решению некоторой счетной системы нелинейных интегральных уравнений относительно неизвестных коэффициентов Фурье $u_n(t)$ $(n=1,2,\dots)$ *по системе* $\{\sin nx\}_{n=1}^{\infty}$ *искомого решения* $u(t,x)$*. Далее, доказаны: теорема о единственности в целом, теорема существования в малом и теорема существования в целом обобщенного решения рассматриваемой смешанной задачи.*

В работе изучаются вопросы существования и единственности обобщённого решения следующей одномерной смешанной задачи:

$$\begin{cases} u_t(t,x)+u_{xxxx}(t,x)=F(t,x,u(t,x),u_x(t,x),u_{xx}(t,x)) \quad (0\le t\le T,\ 0\le x\le \pi), & (1)\\ u(0,x)=\varphi(x) \quad (0\le x\le \pi), & (2)\\ u(t,0)=u(t,\pi)=u_{xx}(t,0)=u_{xx}(t,\pi)=0 \quad (0\le t\le T), & (3)\end{cases}$$

где $0<T<+\infty$; F,φ – заданные функции, а $u(t,x)$ – искомая функция, причём под обобщённым решением задачи (1)-(3) понимаем следующее

Определение. Под обобщенным решением задачи (1)-(3) понимаем функцию $u(t,x)$, обладающую свойствами:

а) $u(t,x), u_x(t,x), u_{xx}(t,x)\in C([0,T]\times[0,\pi]), u_{xxx}(t,x)\in C([0,T];L_2(0,\pi))$;

б) все условия (2) и (3) удовлетворяются в обычном смысле;

в) выполняется интегральное тождество

$$\int_0^T\int_0^\pi \{u(t,x)\cdot V_t(t,x)+u_{xxx}(t,x)\cdot V_x(t,x)+$$

$$+\mathrm{F}(u(t,x))\cdot V(t,x)\}dxdt+\int_0^\pi \varphi(x)\cdot V(0,x)dx=0 \qquad (4)$$

для любой функции $V(t,x)$, обладающей свойствами

$$V(t,x)\in C([0,T]\times[0,\pi]), V_t(t,x)\in L((0,T)\times(0,\pi)),\ V_x(t,x)\in L([0,T];L_2(0,\pi)), \quad (5)$$

$$V(T,x)=0\ \ (0\le x\le \pi),\ \ V(t,0)=V(t,\pi)=0\ \ (0\le t\le T), \quad (6)$$

где

$$\mathrm{F}(u(t,x))\equiv F(t,x,u(t,x),u_x(t,x),u_{xx}(t,x)). \qquad (7)$$

§1. Вспомогательные факты

С целью исследования обобщенного решения задачи (1)-(3) приведем некоторые известные факты и установим ряд новых вспомогательных фактов.

1. Так как система $\{\sin nx\}_{n=1}^{\infty}$ образует базис в пространстве $L_2(0,\pi)$, то очевидно, что каждое обобщенное решение $u(t,x)$ задачи (1)-(3) имеет вид:

$$u(t,x)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(t)\sin nx, \qquad (8)$$

где

$$u_n(t)=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi u(t,x)\sin nx\,dx \quad (n=1,2,...;\ t\in[0,T]). \qquad (9)$$

Тогда, после применения формальной схемы метода Фурье, нахождение функций $u_n(t)$ $(n=1,2,\ldots)$ сводится к решению следующей счетной системы нелинейных интегральных уравнений:

$$u_n(t)=\varphi_n\cdot e^{-n^4t}+\frac{2}{\pi}\int_0^t\int_0^\pi \mathrm{F}(u(\tau,x))\sin nx\cdot e^{-n^4(t-\tau)}dxd\tau \quad (n=1,2,\ldots;t\in[0,T]), \quad (10)$$

где

$$\varphi_n\equiv\frac{2}{\pi}\int_0^\pi\varphi(x)\sin nx\,dx \ \ (n=1,2,...). \qquad (11)$$

2. Исходя из определения обобщенного решения задачи (1)-(3) легко доказывается следующая

Лемма. Если $u(t,x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(t)\sin nx$ – любое обобщенное решение задачи (1)-(3), то функции $u_n(t)$ $(n=1,2,\ldots)$ удовлетворяют системе (10).

3. Обозначим через $B^{\alpha_0,\ldots,\alpha_l}_{\beta_0,\ldots,\beta_l,T}$ совокупность всех функций $u(t,x)$ вида

$$u(t,x)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(t)\sin nx,$$

рассматриваемых на $[0,T]\times[0,\pi]$, для которых все функции $u_n(t)\in C^{(l)}(0,T)$ и

$$J_T(u)\equiv\sum_{i=0}^{l}\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\left(n^{\alpha_i}\cdot\max_{0\le t\le T}|u_n^{(i)}(t)|\right)^{\beta_i}\right\}^{1/\beta_i}<+\infty,$$

где $l\ge 0$ – целое число, $\alpha_i\ge 0$ $(i=\overline{0,l})$, $1\le\beta_i\le 2$ $(i=\overline{0,l})$. Норму в этом множестве определим так: $\|u\|=J_T(u)$. Известно (см. [1]), что все эти пространства банаховы. В дальнейшем для функций $u(t,x)\in B^{\alpha_0,\ldots,\alpha_l}_{\beta_0,\ldots,\beta_l,T}$ будем пользоваться обозначениями:

$$\|u\|_{B^{\alpha_0,\ldots,\alpha_l}_{\beta_0,\ldots,\beta_l,t}}\equiv\sum_{i=0}^{l}\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\left(n^{\alpha_i}\cdot\max_{0\le\tau\le t}|u_n^{(i)}(\tau)|\right)^{\beta_i}\right\}^{1/\beta_i}\quad(0\le t\le T).\qquad(12)$$

4. Для функции $u(t,x)\equiv\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(t)\sin nx\in B^{\alpha_0,\ldots,\alpha_l}_{\beta_0,\ldots,\beta_l,T}$ функцию $u_n(t)$ назовем ее n -той компонентой. Пусть M – любое непустое множество из пространства $B^{\alpha_0,\ldots,\alpha_l}_{\beta_0,\ldots,\beta_l,T}$. Совокупность n-тых компонент всех функций из M обозначим через M_n. Справедлива (см. [1]) следующая

Теорема 1. Для компактности множества $\mathsf{M}\subset B^{\alpha_0,\ldots,\alpha_l}_{\beta_0,\ldots,\beta_l,T}$ в $B^{\alpha_0,\ldots,\alpha_l}_{\beta_0,\ldots,\beta_l,T}$ необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие два условия:

а) для каждого фиксированного n $(n=1,2,\ldots)$ множество M_n компактно в $C^{(l)}([0,T])$;

б) для любого $\varepsilon>0$ существует номер n_ε, один и тот же для всех $u(t,x)\equiv\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(t)\sin nx\in\mathsf{M}$, такой, что

$$\sum_{i=0}^{l}\left\{\sum_{n=n_\varepsilon}^{\infty}(n^{\alpha_i}\cdot\max_{0\le t\le T}|u_n^{(i)}(t)|)^{\beta_i}\right\}^{1/\beta_i} < \varepsilon \quad \forall u\in\mathrm{M}.$$

5. Очевидно, что если $u(t,x)\equiv\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(t)\sin nx\in B_{2,T}^{k}$ ($k\ge 1$ – целое), то $\forall t\in[0,T]$:

$$\|u\|_{B_{1,t}^{k-1}}\equiv\sum_{n=1}^{\infty}n^{k-1}\cdot\max_{0\le\tau\le t}|u_k(\tau)|\le\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\right\}^{\frac{1}{2}}\cdot\left\{\sum_{n=1}^{\infty}(n^k\cdot\max_{0\le\tau\le t}|u_n(\tau)|)^2\right\}^{\frac{1}{2}}=\frac{\pi}{\sqrt{6}}\cdot\|u\|_{B_{2,t}^{k}}. \quad (13)$$

6. Пусть для натурального числа k :

$$\varphi(x)\in C^{(k-1)}([0,\pi]),\ \varphi^{(k)}(x)\in L_2(0,\pi),\ \varphi^{(2s)}(0)=\varphi^{(2s)}(\pi)=0\ \left(s=\overline{0,\left[\frac{k-1}{2}\right]}\right). \quad (14)$$

Тогда, с помощью интегрирования по частям, пользуясь неравенством Бесселя (для нечетных k) и равенством Парсевалля (для четных k), легко получить, что

$$\sum_{n=1}^{\infty}(n^k\cdot\varphi_n)^2\le\frac{2}{\pi}\cdot\left\|\varphi^{(k)}(x)\right\|_{L_2(0,\pi)}^2, \quad (15)$$

где $\varphi_n=\dfrac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi}\varphi(x)\sin nx\,dx$ $(n=1,2,\ldots)$, причем очевидно, что оценка (15) верна и при $k=0$.

§2. Исследование единственности обобщенного решения задачи (1)-(3).

В этом параграфе с помощью неравенства Беллмана доказана следующая теорема о единственности в целом обобщенного решения задачи (1)-(3).

Теорема 2. Пусть

1. $F(t,x,u_1,u_2,u_3)\in C([0,T]\times[0,\pi]\times(-\infty,\infty)^3)$.
2. $\forall R>0$ в $[0,T]\times[0,\pi]\times[-R,R]^3$

$$\left|F(t,x,u_1,u_2,u_3)-F(t,x,\tilde{u}_1,\tilde{u}_2,\tilde{u}_3)\right|\le C_R\cdot\sum_{i=1}^{3}\left|u_i-\tilde{u}_i\right|, \quad (16)$$

где $C_R>0$ – постоянная.

Тогда задача (1)-(3) не может иметь более одного обобщенного решения.

§3. Исследование существования в малом обобщенного решения задачи (1)-(3).

В этом параграфе, комбинированием обобщенного принципа сжатых отображений с принципом Шаудера о неподвижной точке, доказывается следующая теорема существования в малом (т.е. справедливая при достаточно малых значениях T) обобщенного решения задачи (1)-(3).

Теорема 3. Пусть

1. $\varphi(x) \in C^{(2)}([0,\pi]),\ \varphi'''(x) \in L_2(0,\pi)$ и
   $\varphi(0) = \varphi(\pi) = \varphi''(0) = \varphi''(\pi) = 0$.
2. $F(t,x,u_1,u_2,u_3) \in C([0,T]\times[0,\pi]\times(-\infty,\infty)^3)$.

Тогда существует в малом обобщенное решение задачи (1)-(3).

Доказательство. В пространстве $B^2_{1,T}$ рассмотрим оператор H :

$$H(u(t,x)) = \tilde{u}(t,x) \equiv \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{u}_n(t)\sin nx\,, \tag{17}$$

где

$$\tilde{u}_n(t) = \varphi_n \cdot e^{-n^4 t} + \frac{2}{\pi}\int_0^t\int_0^\pi \mathsf{F}(u(\tau,x))\sin nx\cdot e^{-n^4(t-\tau)}dxd\tau \ \ (n=1,2,\ldots;\ t\in[0,T]), \tag{18}$$

числа $\varphi_n\ (n=1,2,\ldots)$ определены соотношением (11), а оператор F определен соотношением (7).

Пользуясь обозначениями (17) и (18), легко получить, что для любой функции $u(t,x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(t)\sin nx \in B^2_{1,T}$

$$\|H(u)\|^2_{B^3_{2,T}} \equiv \|\tilde{u}\|^2_{B^3_{2,T}} \equiv \sum_{n=1}^{\infty}\left(n^3 \cdot \max_{0\le t\le T}|\tilde{u}_n(t)|\right)^2 \le$$

$$\le 2\sum_{n=1}^{\infty}(n^3\cdot\varphi_n)^2 + \frac{4\pi^2}{3}\cdot\|\mathsf{F}(u(t,x))\|^2_{C(\overline{Q}_T)} < +\infty\,, \tag{19}$$

где $Q_T \equiv (0,T)\times(0,\pi)$, причем $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(n^3\cdot\varphi_n)^2 < +\infty$ в силу оценки (15) для $k=3$ и, так как $u(t,x), u_x(t,x), u_{xx}(t,x) \in C(\overline{Q}_T)$, то, в силу условия 2 данной теоремы, $\mathsf{F}(u(t,x)) \equiv F(t,x,u(t,x),u_x(t,x),u_{xx}(t,x)) \in C(\overline{Q}_T)$. Следовательно, оператор H действует из $B^2_{1,T}$ в $B^3_{2,T}$ и, тем более, он действует в $B^2_{1,T}$, ибо, в силу оценки (13) для $k=3$, имеем:

$$\|H(u)\|_{B^2_{1,T}} \le \frac{\pi}{\sqrt{6}}\cdot\|H(u)\|_{B^3_{2,T}}\,. \tag{20}$$

Далее, пусть $\mathsf{K} = \mathsf{K}_R$ – замкнутый шар пространства $B^2_{1,T}$ радиуса R и с центром в нуле. Тогда очевидно, что $\forall u \in \mathsf{K}_R$:

$$\|u(t,x)\|_{C(\overline{Q}_T)}, \|u_x(t,x)\|_{C(\overline{Q}_T)}, \|u_{xx}(t,x)\|_{C(\overline{Q}_T)} \le \|u\|_{B^2_{1,T}} \le R \tag{21}$$

и, следовательно, в силу условия 2 данной теоремы,

$$\forall u \in \mathsf{K}_R \quad \|\mathsf{F}(u(t,x))\|_{C(\overline{Q}_T)} = \|F(t,x,u(t,x),u_x(t,x),u_{xx}(t,x))\|_{C(\overline{Q}_T)} \le C_R. \tag{22}$$

Отсюда, в силу оценки (19), следует, что

$$\forall u \in \mathsf{K}_R \quad \|H(u)\|^2_{B^3_{2,T}} \le 2\sum_{n=1}^{\infty}(n^3 \cdot \varphi_n)^2 + \frac{4\pi^2}{3}\cdot C_R^2 \equiv A_R^2. \tag{23}$$

Следовательно, оператор H действует из $B^2_{1,T}$ в $B^3_{2,T}$ ограниченно.

Теперь покажем непрерывность оператора H в $B^2_{1,T}$. Пусть

$$B^2_{1,T} \ni u_k(t,x) \xrightarrow{B^2_{1,T}} u_0(t,x) \in B^2_{1,T} \quad \text{при} \quad k \to \infty. \tag{24}$$

Тогда очевидно, что

$$\frac{\partial^i u_k(t,x)}{\partial x^i} \xrightarrow{C(\overline{Q}_T)} \frac{\partial^i u_0(t,x)}{\partial x^i} \quad (i = 0,1,2) \quad \text{при} \quad k \to \infty \tag{25}$$

и, следовательно,

$$\mathsf{F}(u_k(t,x)) \xrightarrow{C(\overline{Q}_T)} \mathsf{F}(u_0(t,x)) \quad \text{при} \quad k \to \infty. \tag{26}$$

Далее, из (18), совершенно аналогично (19), получаем, что

$$\|H(u_k) - H(u_0)\|^2_{B^3_{2,T}} \le \frac{2\pi^2}{3}\cdot\|\mathsf{F}(u_k(t,x)) - \mathsf{F}(u_0(t,x))\|^2_{C(\overline{Q}_T)}. \tag{27}$$

Отсюда, в силу (26), следует, что

$$H(u_k(t,x)) \xrightarrow{B^3_{2,T}} H(u_0(t,x)) \quad \text{при} \quad k \to \infty.$$

Таким образом, оператор H действует из $B^2_{1,T}$ в $B^3_{2,T}$ непрерывно и, тем более, в силу оценки (20) для $H(u) = H(u_k) - H(u_0)$, он действует в $B^2_{1,T}$ непрерывно.

Теперь покажем компактность оператора H в $B^2_{1,T}$. Пусть $\mathsf{K} = \mathsf{K}_R$ – любой замкнутый шар пространства $B^2_{1,T}$ радиуса R и с центром в нуле. Тогда, в силу (23), множество $H(\mathsf{K}_R)$ ограничено в $B^3_{2,T}$.

С другой стороны, из (18), пользуясь оценкой (22), получаем, что при любом фиксированном n $(n = 1,2,\ldots)$ $\forall u \in \mathsf{K}_R$ и $t \in [0,T]$:

$$|\tilde{u}_n(t)| \le |\varphi_n| + \frac{2}{\pi}\cdot\|\mathsf{F}(u(\tau,x))\|_{C(\overline{Q}_T)}\cdot \pi T \le |\varphi_n| + 2T\cdot C_R. \tag{28}$$

Далее, из (18) имеем:

$$\widetilde{u}_n'(t) = -n^4 \cdot \varphi_n \cdot e^{-n^4 t} - \frac{2}{\pi} \cdot n^4 \cdot \int_0^t \int_0^\pi \mathsf{F}(u(\tau, x)) \sin nx \cdot e^{-n^4 (t-\tau)} dx d\tau +$$

$$+ \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \mathsf{F}(u(t, x)) \sin nx \, dx \quad (n = 1, 2, \ldots; \, t \in [0, T]). \qquad (29)$$

Отсюда, пользуясь оценкой (22), получаем, что при любом фиксированном n $(n = 1, 2, \ldots)$ $\forall u \in \mathsf{K}_R$ и $t \in [0, T]$:

$$\left|\widetilde{u}_n'(t)\right| \le n^4 \cdot |\varphi_n| + \left\|\mathsf{F}(u(t, x))\right\|_{C(\overline{Q}_T)} \cdot (2n^4 \cdot T + 2) \le n^4 \cdot |\varphi_n| + 2(n^4 \cdot T + 1) \cdot C_R. \quad (30)$$

Из (28) и (30) следует, что при каждом фиксированном n $(n = 1, 2, \ldots)$ семейство

$$(H(K_R))_n \equiv \left\{ \widetilde{u}_n(t) : \sum_{k=1}^\infty \widetilde{u}_k(t) \sin kx \equiv \widetilde{u}(t, x) = H(u(t, x)), \, u \in \mathsf{K}_R \right\} \quad (31)$$

ограничено в $C^{(1)}([0, T])$ и, следовательно, по теореме Арцела, компактно в $C([0, T])$.

Таким образом, для $H(\mathsf{K}_R)$, рассматриваемого как подмножество пространства $B_{1,T}^2$, выполнено условие а) теоремы 1 для пространства $B_{1,T}^2$.

А из оценок

$$\sum_{n=\mathsf{N}}^\infty n^2 \cdot \max_{0 \le t \le T} \left|\widetilde{u}_n(t)\right| \le \left(\sum_{n=\mathsf{N}}^\infty \frac{1}{n^2} \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left\{ \sum_{n=\mathsf{N}}^\infty (n^3 \cdot \max_{0 \le t \le T} \left|\widetilde{u}_n(t)\right|)^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \le \left(\sum_{n=\mathsf{N}}^\infty \frac{1}{n^2} \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left\|\widetilde{u}\right\|_{B_{2,T}^3} =$$

$$= \left(\sum_{n=\mathsf{N}}^\infty \frac{1}{n^2} \right)^{1/2} \cdot \left\|H(u)\right\|_{B_{2,T}^3} \le A_R \cdot \left(\sum_{n=\mathsf{N}}^\infty \frac{1}{n^2} \right)^{1/2}, \qquad (32)$$

где N – любое натуральное число, а $A_R \ge 0$ – число, фигурирующее в (23), следует, что для $H(\mathsf{K}_R)$, рассматриваемого как подмножество пространства $B_{1,T}^2$, выполнено условие б) теоремы 1 для пространства $B_{1,T}^2$.

Таким образом, оператор H переводит каждый шар $\mathsf{K}_R \subset B_{1,T}^2$ в множество $H(\mathsf{K}_R)$, компактное в $B_{1,T}^2$. Следовательно, оператор H действует в $B_{1,T}^2$ компактно. Так как оператор H действует в $B_{1,T}^2$ и непрерывно, то он действует в $B_{1,T}^2$ вполне непрерывно.

Теперь, для $H(u)$, наряду с оценкой (19), получим другую оценку.

Пусть $p_0 (1 < p_0 < 4/3)$ – любое фиксированное число и $\frac{1}{p_0} + \frac{1}{q_0} = 1$, т.е. $q_0 = \frac{p_0}{p_0 - 1}$. Тогда из (18) легко получить, что $\forall n \ (n = 1, 2, \ldots)$ и $t \in [0, T]$:

$$|\widetilde{u}_n(t)| \le |\varphi_n| + \frac{2}{\pi} \cdot \max_{0 \le \tau \le T} \| \mathsf{F}(u(\tau, x)) \|_{L(0,\pi)} \cdot \int_0^t e^{-n^4 (t-\tau)} d\tau,$$

$$\int_0^t e^{-n^4 (t-\tau)} d\tau \le \left\{ \int_0^t e^{-p_0 \cdot n^4 (t-\tau)} d\tau \right\}^{\frac{1}{p_0}} \cdot t^{\frac{1}{q_0}} = t^{\frac{1}{q_0}} \cdot \left\{ \frac{1}{p_0 \cdot n^4} \cdot (1 - e^{-p_0 \cdot n^4 t}) \right\}^{\frac{1}{p_0}} \le$$

$$\le t^{\frac{1}{q_0}} \cdot \left(\frac{1}{p_0 \cdot n^4} \right)^{\frac{1}{p_0}} \le T^{1 - \frac{1}{p_0}} \cdot \left(\frac{1}{p_0} \right)^{\frac{1}{p_0}} \cdot \frac{1}{n^{\frac{4}{p_0}}};$$

следовательно

$$|\widetilde{u}_n(t)| \le |\varphi_n| + \frac{2}{\pi} \cdot \max_{0 \le t \le T} \| \mathsf{F}(u(t, x)) \|_{L(0,\pi)} \cdot \left(\frac{1}{p_0} \right)^{\frac{1}{p_0}} \cdot T^{1 - \frac{1}{p_0}} \cdot n^{-\frac{4}{p_0}},$$

$$n^2 \cdot \max_{0 \le t \le T} |\widetilde{u}_n(t)| \le n^2 \cdot |\varphi_n| + \frac{2}{\pi} \cdot \left(\frac{1}{p_0} \right)^{\frac{1}{p_0}} \cdot T^{1 - \frac{1}{p_0}} \cdot \max_{0 \le t \le T} \| \mathsf{F}(u(t, x)) \|_{L(0,\pi)} \cdot n^{-\frac{4}{p_0} + 2},$$

$$\| H(u) \|_{B^2_{1,T}} \equiv \| \widetilde{u} \|_{B^2_{1,T}} \equiv \sum_{n=1}^{\infty} n^2 \cdot \max_{0 \le t \le T} |\widetilde{u}_n(t)| \le \sum_{n=1}^{\infty} n^2 \cdot |\varphi_n| +$$

$$+ \frac{2}{\pi} \cdot \left(\frac{1}{p_0} \right)^{\frac{1}{p_0}} \cdot T^{1 - \frac{1}{p_0}} \cdot \max_{0 \le t \le T} \| \mathsf{F}(u(t, x)) \|_{L(0,\pi)} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{4}{p_0} - 2}}, \tag{33}$$

причем очевидно, что

$$0 < \delta_0 < \frac{1}{4}, \quad \delta_0 \equiv 1 - \frac{1}{p_0}; \quad \frac{4}{p_0} - 2 \equiv \varepsilon_0 > 1. \tag{34}$$

Из (33), в силу (22), получаем, что $\forall u \in \mathsf{K}_R$:

$$\| H(u) \|_{B^2_{1,T}} \le \sum_{n=1}^{\infty} n^2 \cdot |\varphi_n| + \frac{2}{\pi} \cdot \left(\frac{1}{p_0} \right)^{\frac{1}{p_0}} \cdot T^{\delta_0} \cdot C_R \cdot \pi \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\varepsilon_0}}. \tag{35}$$

Из (35) видно, что если число

$$R > \sum_{n=1}^{\infty} n^2 \cdot |\varphi_n| \tag{36}$$

и фиксировано, то при достаточно малых значениях T

$$\forall u \in \mathrm{K}_R \quad \|H(u)\|_{B^2_{1,T}} \le R,$$

т.е. $H(\mathrm{K}_R) \subset \mathrm{K}_R$.

Таким образом, для любого фиксированного R, удовлетворяющего условию (36), при достаточно малых значениях T оператор H преобразует шар K_R в себя вполне непрерывно. Следовательно, в силу принципа Шаудера о неподвижной точке, при достаточно малых значениях T оператор H имеет в $\mathrm{K}_R \subset B^2_{1,T}$ по крайней мере одну неподвижную точку u:

$$u = H(u). \tag{37}$$

Тогда, как видно из определения оператора H (см. (17) и (18)), для найденной неподвижной точки $u = u(t,x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(t) \sin nx$ функции $u_n(t)$ $(n = 1,2,\ldots)$ удовлетворяют системе (10). Кроме того, так как оператор H действует из $B^2_{1,T}$ в $B^3_{2,T}$, то для найденной неподвижной точки $u(t,x)$ оператора H имеем:

$$u(t,x) \in B^3_{2,T}. \tag{38}$$

Далее, проверяется, что найденная функция $u(t,x) \in B^3_{2,T}$ является обобщенным решением задачи (1)-(3). Теорема доказана.

Замечание. Следует отметить, что условия 1 теоремы 3, наложенные на начальную функцию $\varphi(x)$, не только достаточны, но и необходимы для существования обобщенного решения задачи (1)-(3).

§4. Исследование существования в целом обобщенного решения задачи (1)-(3).

В этом параграфе с помощью усиленного принципа Шаудера о неподвижной точке доказана следующая теорема о существовании в целом обобщенного решения задачи (1)-(3).

Теорема 4. Пусть

1. Выполнены все условия теоремы 3.

2. В $[0,T] \times [0,\pi] \times (-\infty,\infty)^3$

$$|F(t,x,u_1,u_2,u_3)| \le C \cdot (1 + |u_1| + |u_2| + |u_3|), \tag{39}$$

где $C > 0$ – постоянная.

Тогда задача (1)-(3) имеет обобщенное решение.

ЛИТЕРАТУРА

1. Худавердиев К.И. К теории многомерных смешанных задач для нелинейных гиперболических уравнений. – Дисс...докт. физ.-мат. наук – Баку, 1973г., Азербайджанский Государственный Университет, 319с.

DÖRDÜNCÜ TƏRTİB YARIM-XƏTTİ PARABOLİK TƏNLİKLƏR ÜÇÜN BİRÖLÇÜLÜ QARIŞIQ MƏSƏLƏNİN ÜMUMİLƏŞMİŞ HƏLLİNİN TƏDQİQİ. I.

K.İ.XUDAVERDİYEV, S.A.AĞAYEVA

XÜLASƏ

İş dördüncü tərtib yarım-xətti parabolik tənliklər üçün birölçülü qarışıq məsələnin ümumiləşmiş həllinin varlığı və yeganəliyi məsələlərinin öyrənilməsinə həsr olunmuşdur. İşdə baxılan məsələnin ümumiləşmiş həllinə tərif verilir. Furye metodunun formal sxemini tətbiq etdikdən sonra axtarılan $u(t,x)$ funksiyasının $\{\sin nx\}_{n=1}^{\infty}$ sistemi üzrə naməlum $u_n(t)$ $(n=1,2,\ldots)$ Furye əmsallarının tapılması müəyyən hesabi qeyri-xətti inteqral tənliklər sisteminin həllinə gətirilir. İşdə öyrənilən qarışıq məsələnin ümumiləşmiş həllinin qlobal yeganəliyi, lokal varlığı və qlobal varlığı haqqında teoremlər isbat edilir.

INVESTIGATION OF GENERALIZED SOLUTION OF A ONE-DIMENSIONAL MIXED PROBLEM FOR A FOURTH ORDER SEMILINEAR PARABOLIC EQUATIONS. I.

K.I.KHUDAVERDIYEV, S.A.AGAYEVA

SUMMARY

This work is dedicated to the study of existence and uniqueness of generalized solution of one-dimensional mixed problem for a semilinear fourth order parabolic equations. Conception of generalized solution for the mixed problem under consideration is introduced. After applying Fourier method, the solution of original problem is reduced to the solution of some countable system of non-linear integral equations in unknown Fourier coefficients $u_n(t)$ $(n=1,2,\ldots)$ of the sought solution $u(t,x)$ based on the system $\{\sin nx\}_{n=1}^{\infty}$. Besides, uniqueness theorem in large, existence theorem in small and existence theorem in large for the generalized solution of the mixed problem under consideration are also proved in the this work.